Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

2 Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \qquad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x, nel segmento parabolico delimitato dall'asse x. Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

2 Per qualunque valore di $a > 0$ la parabola è simmetrica rispetto all'asse y, passa per il punto $(0; 1)$ e per i punti $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right)$ e ha concavità verso il basso. Il punto generico P della parabola ha coordinate $(x_P; 1 - ax_P^2)$.

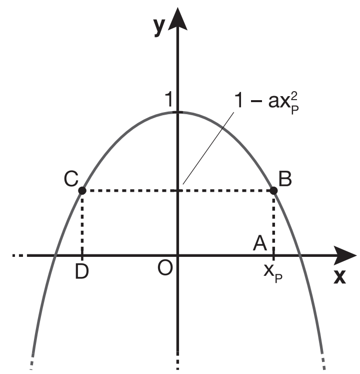

Figura 14

Il rettangolo inscritto nel segmento parabolico delimitato dall'asse x ha vertici di coordinate $A(x_P; 0)$, $B(x_P; 1 - ax_P^2)$, $C(-x_P; 1 - ax_P^2)$ e $D(-x_P; 0)$, con la condizione $0 \leq x_P \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Possiamo esprimere perimetro e area del rettangolo $ABCD$ come funzioni dell'ascissa x_P:

$$2p(x_P) = 4x_P + 2(1 - ax_P^2) \to 2p(x_P) = -2ax_P^2 + 4x_P + 2;$$

$$A(x_P) = 2x_P(1 - ax_P^2) = 2(x_P - ax_P^3), \text{ con } 0 \leq x_P \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Per determinare per quale valore di a l'area del rettangolo è massima calcoliamo la derivata prima della funzione che esprime l'area e studiamone il segno:

$$A'(x_P) = 2 - 6ax_P^2 \quad \text{con } 0 \leq x_P \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$A'(x_P) = 0 \to 2 - 6ax_P^2 = 0 \to 3ax_P^2 = 1 \to x_P = \pm\frac{\sqrt{3a}}{3a}.$$

La radice esiste sempre poiché, per ipotesi, $a > 0$.

Siccome siamo interessati all'ascissa positiva consideriamo $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ e osserviamo che $x_P < \frac{1}{\sqrt{a}}\ \forall a > 0$.

$$A'(x_P) > 0 \to 3ax_P^2 < 1 \to 0 < x_P < \frac{\sqrt{3a}}{a}.$$

$$A'(x_P) < 0 \to \frac{\sqrt{3a}}{3a} < x_P < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Quindi $x_P = \frac{\sqrt{3a}}{3a}$ è punto di massimo ed è un punto interno all'intervallo $\left[0; \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Procediamo allo stesso modo per determinare per quale valore di x_P il perimetro assume valore massimo. Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno:

$$2p'(x_P) = -4ax_P + 4 \quad \text{con } 0 \leq x_P \leq \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

$$2p'(x_P) = 0 \to -4ax_P + 4 = 0 \to x_P = \frac{1}{a}.$$

Osserviamo che $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $a > 1$ e che $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$ per $0 < a \leq 1$.

$$2p'(x_P) > 0 \to x_P < \frac{1}{a}.$$

$$2p'(x_P) < 0 \to x_P > \frac{1}{a}.$$

Quindi $x_P = \frac{1}{a}$ è punto di massimo se $a > 1$, ossia se x_P è interno a $\left[0; \frac{1}{\sqrt{a}}\right]$.

Uguagliamo le due espressioni in a che abbiamo trovato per x_P per determinare il valore di a:

$\frac{\sqrt{3a}}{3a} = \frac{1}{a} \rightarrow a = 3$, che è accettabile perché $3 > 1$.

L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è: $y = 1 - 3x^2$.