Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

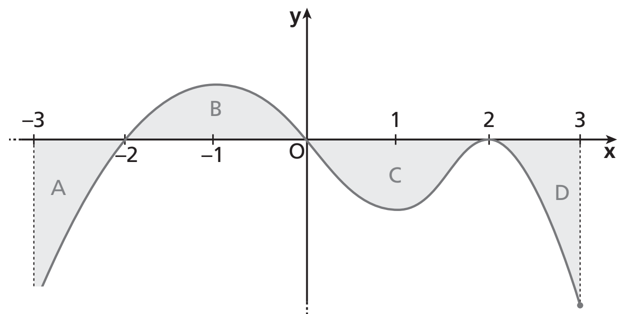

Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

PROBLEMA 1

a. Indichiamo con x i minuti di conversazione effettuati nel mese considerato: x rappresenta una variabile discreta, ma ai fini della risoluzione ipotizziamo che vari con continuità in $\mathbb{R}$ e che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano continue rispetto a x. La spesa totale mensile in euro è espressa quindi dalla funzione:

$$f(x) = 10 + \frac{x}{10}.$$

La variabile x può assumere valori tra un minimo di 0 minuti e un massimo di 43 200 minuti, pari al numero di minuti di un mese commerciale di 30 giorni.

Il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta un modello lineare crescente, dove l'intercetta 10 indica il costo fisso iniziale e la pendenza $\frac{1}{10}$ indica il costo al minuto. Quindi la spesa minima mensile è € 10, che corrisponde a 0 minuti di conversazione, mentre la spesa massima mensile è € 4330, corrispondente a una conversazione lunga tutto il mese.

Il costo medio al minuto è espresso dal rapporto:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ ovvero } g(x) = \frac{x+100}{10x}.$$

Il dominio della funzione $g(x)$ è uguale a quello della funzione $f(x)$ privato dello 0. Il grafico della funzione omografica $g(x)$, nel suo dominio naturale, è un'iperbole con l'asse y come asintoto verticale e la retta $y = \frac{1}{10}$ come asintoto orizzontale. Rappresentiamo i grafici nel primo quadrante.

Per $x > 0$, la funzione $g(x)$ tende decrescendo al valore $\frac{1}{10}$ senza assumere mai tale valore. Quindi nel dominio $]0; +\infty[$ la funzione $g(x)$ non ha estremanti relativi.

Se tuttavia consideriamo il dominio $]0; 43\,200]$ imposto dalla situazione concreta, la funzione $g(x)$ ammette minimo assoluto (e quindi anche relativo) nell'estremo destro del suo dominio.

Il minimo assoluto vale

$$g(43\,200) = \frac{43\,300}{432\,000} \simeq 0,1,$$

cioè un valore prossimo a quello dell'asintoto. Dal punto di vista dell'analisi dei consumi, l'errore che si commette a lavorare nel dominio $]0; +\infty[$ anziché nel dominio $]0; 43\,200]$ è trascurabile, quindi nel seguito considereremo semplicemente $x > 0$.

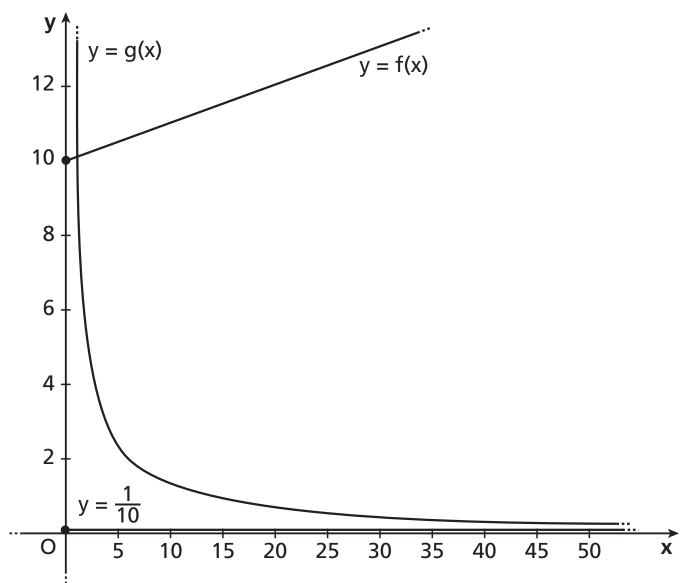

Figura 3

La funzione $g(x)$ è decrescente e quindi il costo medio al minuto diminuisce all'aumentare dei minuti di conversazione effettuati; esso tuttavia non potrà mai essere inferiore a 10 centesimi al minuto.

b. Se x_0 rappresenta il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, e quindi $g(x_0)$ il relativo costo medio per minuto, allora il valore x_1 richiesto indica il numero di minuti di conversazione che dimezzano il costo medio $g(x_0)$. Di conseguenza dovrà necessariamente essere $x_1 > x_0$.

Determiniamo x_1 in funzione di x_0.

$$g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2} \rightarrow \frac{x_1 + 100}{10x_1} = \frac{x_0 + 100}{20x_0} \rightarrow 2x_0(x_1 + 100) = x_1(x_0 + 100) \rightarrow x_1 = \frac{200x_0}{100 - x_0}.$$

Scriviamo la funzione che esprime la dipendenza di x_1 da x_0 come:

$$h(x) = \frac{200x}{100 - x}.$$

Nel dominio naturale il grafico di tale funzione omografica è un'iperbole di asintoti $x = 100$ e $y = -200$. Riferita al contesto reale, rappresentiamo il grafico solo per $x > 0$.

Poiché sia le ascisse sia le ordinate rappresentano minuti di conversazione, solamente il ramo positivo dell'iperbole ha un significato reale.

Il valore 100, che individua l'asintoto verticale, è esattamente il numero di minuti di conversazione che hanno come costo medio $g(100) = \frac{1}{5} = 0,2$, esattamente il doppio di $\frac{1}{10}$, costo medio asintotico. Raggiunti o superati i 100 minuti di conversazione, il costo medio non è quindi più dimezzabile. Dunque il dominio che modellizza la situazione reale è $]0; 100[$. Più ci avviciniamo ai 100 minuti di conversazione, più il tempo x_1 necessario a dimezzare il costo al minuto tende a diventare infinitamente elevato, da cui l'andamento asintotico della funzione considerata.

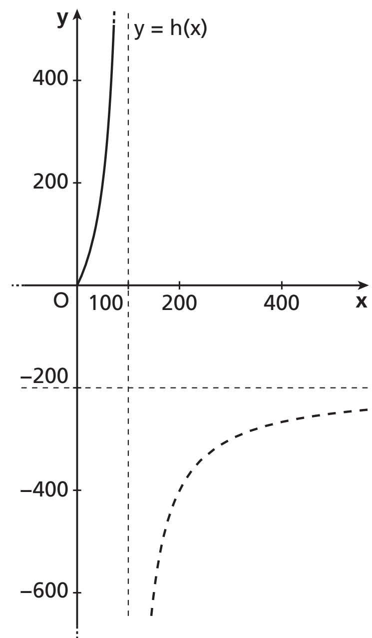

Figura 4

c. Cerchiamo una funzione del tipo

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

il cui grafico passa per i punti $A(0; 2)$, $B\left(2; \frac{7}{2}\right)$ e $C(4; 4)$.

Risolviamo il sistema ottenuto sostituendo all'equazione della funzione le coordinate dei punti noti:

$$\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 4a + 2b = \frac{3}{2} \\ 8a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

La funzione che descrive il margine superiore della zona considerata è dunque

$$p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2, \text{ con } x \in [0; 6].$$

La funzione descrive un arco di parabola il cui vertice è proprio il punto C, come suggerisce la figura.

L'area della zona considerata, ovvero l'area sottesa dalla funzione $p(x)$ nell'intervallo $[0; 6]$, vale:

$$A_{\text{totale}} = \int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right)dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = 21 \text{ km}^2.$$

La regione Z priva di copertura ha area 0,5 km^2, pertanto la regione effettivamente coperta dal segnale ha area $A_{\text{coperta}} = 20,5$ km^2. Osserviamo che:

$$\frac{A_{\text{coperta}}}{A_{\text{totale}}} = \frac{20,5}{21} \simeq 0,976 = 97,6\%.$$

Tale rapporto è quindi superiore alla copertura dichiarata dal gestore (96%). L'affermazione sul sito web sottostima l'effettiva copertura, ma la differenza è a vantaggio del consumatore.

d. Dopo la modifica del piano tariffario, le funzioni diventano definite per casi, in particolare l'espressione della spesa totale dopo x minuti di conversazione diventa una funzione lineare crescente a tratti di equazione:

$$f_2(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{x}{10} & \text{se } 0 \leq x \leq 500 \\ 10 + \dfrac{x}{10} + \dfrac{x-500}{10} = \dfrac{x-200}{5} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

La nuova funzione è continua in tutto il suo dominio, anche in 500, dove limite destro e limite sinistro coincidono col valore $f_2(500) = 60$. La funzione non è invece derivabile in tale punto in quanto la derivata sinistra è $\frac{1}{10}$, mentre la derivata destra vale $\frac{1}{5}$. La funzione $f_2(x)$ è quindi derivabile in ogni punto del dominio tranne in $x = 500$, dove è presente un punto angoloso.

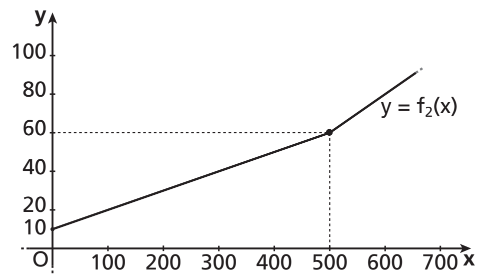

Figura 5

Il costo medio al minuto aggiornato alla nuova tariffa diventa:

$$g_2(x) = \frac{f_2(x)}{x} = \begin{cases} \dfrac{x+100}{10x} & \text{se } 0 < x \leq 500 \\ \dfrac{x-200}{5x} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

Questa funzione è continua in ogni punto del dominio, anche in 500, e vale $g_2(500) = \frac{3}{25} = 0,12$.

Il grafico di tale funzione è rappresentato da due rami di iperbole.
Rispetto alla situazione precedente, $g_2(x)$ presenta ora un nuovo asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{1}{5}$, è decrescente tra 0 e 500 e crescente per $x > 500$, con un minimo assoluto in 500. La funzione non ha invece massimo assoluto né relativo.

In 500, la funzione $g_2(x)$ ha un punto angoloso e la sua derivata non è definita in tale punto. Dunque, in 500, la funzione $g_2'(x)$ ha una singolarità con salto.

Tra 0 e 500, la concavità di $g_2(x)$ è rivolta verso l'alto, quindi $g_2''(x)$ è positiva e di conseguenza $g_2'(x)$ è crescente. Per ragionamenti analoghi, $g_2'(x)$ è decrescente per $x > 500$.

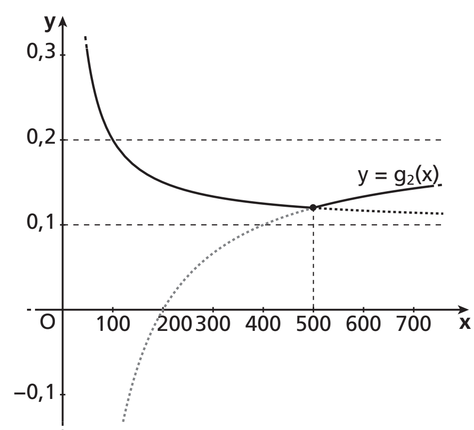

Figura 6

Potevamo pervenire alle stesse conclusioni studiando la funzione:

$$g_2'(x) = \begin{cases} -\dfrac{10}{x^2} & \text{se } 0 < x < 500 \\ \dfrac{40}{x^2} & \text{se } x > 500 \end{cases}.$$

Nella situazione concreta, la funzione $f_2(x)$ che descrive la spesa totale continua a crescere, ma raddoppia la pendenza dopo i primi 500 minuti, perché da quel momento in poi raddoppia il costo al minuto. Per quanto riguarda la funzione $g_2(x)$ che descrive la spesa media al minuto, notiamo che, come per il piano tariffario precedente, decresce per i primi 500 minuti, ma poi inverte la tendenza e cresce per avvicinarsi al nuovo costo unitario di 20 centesimi al minuto.