Liceo scientifico e opzione scienze applicate*

5 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Americhe, 2015.

5 Consideriamo l'arco di parabola di equazione $y = 4 - x^2$ appartenente al primo quadrante. Un generico punto P su tale arco ha coordinate $P(k; 4-k^2)$, con $0 < k < 2$.

Da P tracciamo la tangente alla parabola, che interseca gli assi x e y rispettivamente in A e in B. Poiché $y' = -2x$, la retta tangente alla parabola in P ha equazione:

$$y-(4-k^2) = -2k(x-k) \rightarrow$$
$$\rightarrow y-4+k^2 = -2kx+2k^2 \rightarrow y = -2kx+k^2+4.$$

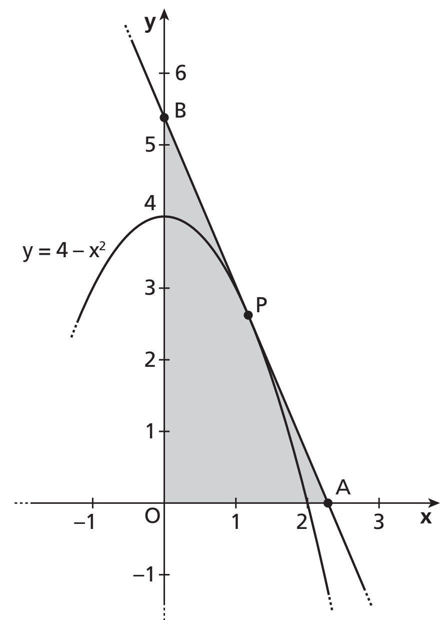

Figura 8

Le coordinate di A sono:

$$\begin{cases} y = -2kx+k^2+4 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2kx+k^2+4=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{k^2+4}{2k} \\ y=0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{k^2+4}{2k}; 0\right).$$

Le coordinate di B sono:

$$\begin{cases} y = -2kx+k^2+4 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = k^2+4=0 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow B(0; k^2+4).$$

L'area del triangolo OAB, in funzione di k, risulta:

$$A(k) = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2+4}{2k}\cdot(k^2+4) = \frac{(k^2+4)^2}{4k}.$$

Cerchiamo il valore di k che rende minima tale area:

$$A'(k) = \frac{2(k^2+4)\cdot 2k\cdot 4k-(k^2+4)^2\cdot 4}{16k^2} = \frac{4(k^2+4)(3k^2-4)}{16k^2},$$

$$A'(k) = 0 \rightarrow 3k^2-4=0 \rightarrow k = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Nell'intervallo considerato $]0; 2[$ è dunque:

- $A'(k) = 0$ per $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$;
- $A'(k) < 0$ e $A(k)$ decrescente per $0 < k < \frac{2}{\sqrt{3}}$;
- $A'(k) > 0$ e $A(k)$ crescente per $\frac{2}{\sqrt{3}} < k < 2$;

quindi l'area del triangolo OAB assume valore minimo per $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Il punto P corrispondente ha coordinate:

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 4-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \rightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; 4-\frac{4}{3}\right) \rightarrow P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{8}{3}\right).$$